

Dev n° 8

Ref: Jean Etienne Rombaldi

"Mathématiques par l'agrégation:
Algèbre et géométrie" p22-23
Site: EWnaTitre: Classification des groupes d'ordre p^2

Le but est de démontrer le thm suivant, puis de classer ses groupes.

Prop:Soit G un groupe d'ordre p^2 . (p premier).
Alors, G est abélien.

Pour se faire, démontrons des lemmes intermédiaires:

Lemme 1:Soit $p \geq 2$ premier et G un p -groupe opérant sur E un ensemble fini.
Alors,

$$|E| \equiv |E^G| \pmod{p}.$$

Démontrons le:

Demo: $|G| = p^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$.Pour toute orbite $\text{Orb}(x_i)$ non réduite à un point, s'il existe, on a:

$$|\text{Orb}(x_i)| = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|} = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|} \geq 2.$$

 $\leftarrow$ sinon $\text{Stab}_x = G \Rightarrow \text{Orb}(x_i) = \{x_i\}$.Donc, $|\text{Stab}(x_i)| = p^{\beta_i}$ avec $0 \leq \beta_i < \alpha$ et $|\text{Orb}(x_i)| = p^{\alpha - \beta_i}$ avec $1 \leq \alpha - \beta_i \leq \alpha$

Il en résulte:

$$|E| = |E^G| + \sum_{\substack{i=1 \\ |\text{Orb}(x_i)| \geq 2}}^r |\text{Orb}(x_i)| = |E^G| \pmod{p} \square$$

Ensuite, on montre:

Lemme 2:Le centre d'un p -groupe n'est pas trivial.Demo:Soit G un groupe à p^α éléments

On a, par le lemme 1,

$$|G| \equiv |Z(G)| \pmod{p}. \Rightarrow |Z(G)| \text{ multiple de } p.$$

Et, $|Z(G)| \geq 1$ et $|Z(G)|$ multiple de p

$$\hookrightarrow |Z(G)| \geq p.$$

$$\Rightarrow Z(G) \neq \{1\} \square$$

Passons au thm:

Démo:

Soit G d'ordre p^2 .

S.q par l'absurde G non abélien, c-a-d $Z(G) \neq G$.

* Lagrange:

Comme $Z(G)$ ss-g de G , on a par:

Lagrange: $|Z(G)| = \{1, p, p^2\}$.

lemme 2.

sinon $Z(G) = G$.

Donc, $|Z(G)| = p$.

Donc, $\exists g \in Z(G) \text{ t.q. } Z(G) = \langle g \rangle$

Soit $h \in G \setminus Z(G)$, en particulier $\langle h \rangle$ est abélien donc $G \neq \langle h \rangle$ et $o(h) = p$.

* n.g. $Z(G) \cap \langle h \rangle = \{1\}$:

De plus, $|Z(G) \cap \langle h \rangle| \mid |Z(G)| \Rightarrow |Z(G) \cap \langle h \rangle| \in \{1, p\}$.

$\Rightarrow Z(G) \cap \langle h \rangle = \{1\}$ ou $Z(G)$

Or $h \notin Z(G)$

$\Rightarrow Z(G) \cap \langle h \rangle = \{1\}$.

Posons $\varphi: (i, j) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^2 \mapsto g^i h^j$

* n.g. φ injective:

$\forall (i, j), (i', j') \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^2$,

$$\varphi(i, j) = \varphi(i', j') \Leftrightarrow g^i h^j = g^{i'} h^{j'}$$

$$\stackrel{g \in Z(G)}{=} g^{i-i'} h^{j-j'} = 1$$

$$\underbrace{g^{i-i'}}_{\in Z(G)} \underbrace{h^{j-j'}}_{\in \langle h \rangle} = 1$$

$$p \mid (i-i') \text{ et } p \mid (j-j')$$

$$\Leftrightarrow g^{i-i'} = h^{j-j'} = 1 \stackrel{+}{\underset{p \mid (i-i'), j-j' \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}{\Rightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow (i, j) = (i', j')$$

Donc φ injective.

* φ bijective:

Par cardinalité φ bijective.

Donc φ surjective.

* Conclusion:

Soit $(a, b) \in G^2$. $\exists (i, j), (i', j') \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^2$ t.q. $a = g^i h^j$ et $b = g^{i'} h^{j'}$.

Donc,

$$ab = g^i h^j g^{i'} h^{j'} \stackrel{g \in Z(G)}{=} g^{i+i'} h^{j+j'} \stackrel{g \in Z(G)}{=} g^{i'} h^{j'} g^i h^j = ba.$$

Absurdité $\square$

Classification:

$\rightarrow$ Si G admet un élément d'ordre $p^2 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

$\rightarrow$ Sinon, tout les élé. $\neq 1$ sont d'ordre p .

Soit $h \in G \setminus \{1\}$ et $g \in G \setminus \langle h \rangle \rightsquigarrow \langle h \rangle \cap \langle g \rangle = \{1\}$.

$$\stackrel{+}{\rightsquigarrow} G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2.$$

Annexe:

→ Lagrange:

Soit G un groupe fini et $H < G$.

Alors, $|H| \mid |G|$

$$\hookrightarrow |G| = |H| [G:H] \Rightarrow |H| \text{ divise } |G|.$$

$$\rightarrow E^G = \{x \in E \mid G \cdot x = \{x\}\}$$

→ H groupe avec $|H| = p$ (p premier). Alors $\exists g \in H$ t.q. $\langle g \rangle = H$.

Démo:

Sq par p. absurde H n'est pas monogène.

Alors, H contient soit un élément d'ordre p : $\langle h \rangle = \{e, h, \dots, h^{p-1}\} = H$
alors il est monogène.

pas d'élément d'ordre p : prenons $h \in H$ avec $h \neq e$.

On a $o(h) \mid p$ et p premier
 $\Rightarrow o(h) = p$ ABSURDE.

→ question colle:

Que se passe-t-il par p^3 ?

$$\text{Faux: ex } |H_8| = \left\{ \text{Id}, -\text{Id}, \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

groupe des quaternions

Que se passe-t-il par $|G| = pq$ avec p et q premier entre eux?

S.q $p < q$.

→ Si $p \nmid q-1$, alors tout groupe d'ordre pq est cyclique

→ Si $p \mid q-1$: il ya deux groupes d'ordre pq non isomorphes:

le groupe cyclique et un produit semi-direct non abélien

Soit G un groupe avec $G/Z(G)$ monogène.

Alors, G abélien.

$G/Z(G)$ monogène: $\exists n \in G/Z(G)$ tel que $G/Z(G) = \langle n^k \mid k \in \mathbb{Z} \rangle$

donc, $\exists h \in G$ tel que $G/Z(G) = \langle \bar{h}^k \mid k \in \mathbb{Z} \rangle$

Soit $a, b \in G$.

$$\text{On prend } i \text{ et } j \text{ tel que } a = \bar{g}^i \underbrace{z_a}_{\in Z(G)} \text{ et } b = \bar{g}^j \underbrace{z_b}_{\in Z(G)}$$

$$\text{On a: } ab a^{-1} = \bar{g}^i \underbrace{z_a}_{\in G} \underbrace{\bar{g}^j z_b z_a^{-1}}_{\in Z(G)} \bar{g}^i = \bar{g}^i z_a z_a^{-1} \bar{g}^j z_b \bar{g}^{-i}$$

$$= \bar{g}^i \bar{g}^j z_b \bar{g}^{-i} \quad \left. \begin{array}{l} \text{pu } g \text{ commutent} \\ \text{et } z_b \in Z(G) \end{array} \right\}$$

$$= \bar{g}^i \bar{g}^{-i} \bar{g}^j z_b$$

$$= b.$$

Donc $ab = ba$ □

Groupe d'ordre p^2

Prop:

Soit G un groupe d'ordre p^2 avec p premier.

Alors, G abélien.

Lemme: (1)

$p \geq 2$ premier. G a à l'ensemble fini et G un p -groupe.

Alors, $|E| \equiv |E^G| \pmod{p}$

Lemme: (2)

Le centre d'un p -groupe n'est pas trivial. (p premier)

Démo: (1)

On a $|G| = p^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, p premier.

• Si $\exists x \in E$ t.q. $|\text{Orb}(x)| > 1$: OK

• Sinon, $\forall x_i \in E$ avec $|\text{Orb}(x_i)| > 1$, on a:

$$|\text{Orb}(x_i)| = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|} \geq 2$$

Donc, $|\text{Stab}(x_i)| = p^{\beta_i}$ avec $0 \leq \beta_i < \alpha$ et $|\text{Orb}(x_i)| = p^{\alpha - \beta_i}$.

Donc,

$$|E| = |E^G| + \sum_{\substack{i=1 \\ |\text{Orb}(x_i)| \geq 2}}^r |\text{Orb}(x_i)| \equiv |E^G| \pmod{p} \quad \square$$

Démo: (2)

G agit par conjugaison. Par (1), on a:

$$|G| \equiv |Z(G)| \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$$

Et $|Z(G)| \geq 1$ donc $|Z(G)|$ multiple de p .

Donc, $Z(G)$ non trivial $\square$

8 Démon: (Prop)

S.q. par l'absurde G non abélien c-a-d $Z(G) \neq G$.

* Par Lagrange: $|Z(G)| \in \{1, p, p^2\}$
(2) $\uparrow$ $\sim$ hyp.

Donc, $\exists g \in G$ t.q. $Z(G) = \langle g \rangle$.

Soit $h \in G \setminus Z(G)$, en particulier $\langle h \rangle$ abélien donc $G \neq \langle h \rangle$ et $o(h) = p$.

* Il y a $Z(G) \cap \langle h \rangle = \{1\}$:

On a:

$$|Z(G) \cap \langle h \rangle| \mid |Z(G)| \Rightarrow |Z(G) \cap \langle h \rangle| \in \{1, p\}$$

$$\Leftrightarrow Z(G) \cap \langle h \rangle = \{1\} \text{ ou } Z(G) \\ \text{impossible } h \notin Z(G)$$

Posons $\varphi: (i, j) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow g^i h^j$

* Il y a φ injective:

$\forall (i, j), (i', j')$ on a:

$$\varphi(i, j) = \varphi(i', j') \Leftrightarrow g^i h^j = g^{i'} h^{j'}$$

$$\Leftrightarrow g^{i-i'} = h^{j'-j} = 1$$

$$\Leftrightarrow (i, j) = (i', j')$$

* φ bijectif: par cardinalité $\Rightarrow \varphi$ surj.

* Conclusion:

Soient $a, b \in G$, $\exists (i, j), (i', j')$ t.q. $a = g^i h^j$ et $b = g^{i'} h^{j'}$.

$$\text{On a: } ab = g^i h^j g^{i'} h^{j'} = \underset{g \in Z(G)}{g^{i+i'}} \underset{g \in Z(G)}{h^{j+j'}} = g^{i+i'} h^{j+j'} = g^{i'} h^{j'} g^i h^j = ba \quad \square$$

Classification:

• Soit $\exists g \in G$ t.q. $o(g) = p^2 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$

• Sinon $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.